théorème. *$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est injective*

Lemme. *pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on définit le noyau de Gauss*

$$q_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Alors $\mathcal{F}(q_t)(\xi) = e^{-\frac{t\xi^2}{2}} = \sqrt{2\pi t}\, q_{t^{-1}}$

Démonstration. *On a*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(q_1)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} - ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}((x+i\xi)^2 + \xi^2)} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx\end{aligned}$$

On considère $\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \to & e^{-\frac{1}{2}z^2} \end{array}$ *Pour $R > 0$ et ξ fixé on note $\Gamma(R)$ le rectange le sommet $R, R+i\xi, -R+i\xi, -R$ parcouru dans le sens direct. Alors comme ϕ est holomorphe on a par le théorème de Cauchy :*

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\Gamma(R)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= \int_{-R}^{R} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}(R+it)^2} i dt - \int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx - \int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}(-R+it)^2} i dt\end{aligned}$$

On note les quatres termes de la somme $I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$ respectivement. On a par Fubini et un changement de variable

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \tag{1}$$

$$= \int_{[0,2\pi[} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \tag{2}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr \int_{[0,2\pi[} d\theta \tag{3}$$

$$= 2\pi \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} \tag{4}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \tag{5}$$

$\lim_{R\to\infty} I_1 = \sqrt{2\pi}$.
$|I_2| \leq \int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}R^2} dt = e^{-\frac{1}{2}R^2}\xi \underset{R\to\infty}{\to} 0$, *De même pour I_4.*
$|\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx| \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-\xi^2)} dx < \infty$ *donc $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx$ converge ainsi*
$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx$
En passant a la limite dans l'égalité donné par le théorème de Cauchy il vient

$$0 = \sqrt{2\pi} - \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(q_1)(\xi) &= \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{2}}\end{aligned}$$

On a $\mathcal{F}(q_t)(\xi) = \mathcal{F}(q_1)(\sqrt{t}\xi) = e^{-\frac{t\xi^2}{2}}$

Démonstration. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ *est linéaire par linéarité de l'intégrale. Montrons que* $ker(\mathcal{F}) = 0$. *Soit* $f \in ker(\mathcal{F})$. *Pour* $a \in \mathbb{R}$ *fixé et pour tout* $t > 0$ *on définit* $g_t(x) = q_t(x)e^{-iax}$. *Par la formule de la dualité :*

$$\begin{aligned}0 = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x)g_t(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(g_t)(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}(q_t)(x-a)dx \\ &= f * \mathcal{F}(q_t)(a) \\ &= \sqrt{2\pi t} f * q_{t^{-1}}(a)\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(t, a) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ *On a* $f * q_{t^{-1}}(a) = 0$ *Or* $(q_t)_{t>0}$ *est une approximation de l'unité donc par continuité de la norme :*

$$0 = ||f - f|| = \lim_{t\to\infty} ||f * q_{t^{-1}} - f||_1 = \lim_{t\to\infty} ||f||_1 = ||f||_1$$

donc $f = 0$